ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THÀNH TRUNG

MỘT PHƯƠNG PHÁP QUY HOẠCH LỒI GIẢI MỘT LỚP BÀI TOÁN CHẤP NHẬN LỒI TÁCH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THÀNH TRUNG

MỘT PHƯƠNG PHÁP QUY HOẠCH LỒI GIẢI MỘT LỚP BÀI TOÁN CHẤP NHẬN LỒI TÁCH

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 84 60 112

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TSKH. LÊ DŨNG MƯU

Thái Nguyên - 2018

Mục lục

Lời cảm ơn **ii**

Mở đầu **1**

Chương 1 Kiến thức chuẩn bị **2**

1.1 Tập lồi, hàm lồi 2

1.2 Toán tử chiếu lên tập lồi đóng 10

1.3 Dưới vi phân hàm lồi 14

Chương 2 Phương pháp quy hoạch lồi giải bài toán chấp nhận lồi tách **21**

2.1 Bài toán quy hoạch lồi 21

2.1.1 Định nghĩa 21

2.1.2 Điều kiện tồn tại nghiệm 25

2.1.3 Định lý Karush-kuhn-Tucker 28

2.1.4 Phương pháp chiếu đạo hàm 32

2.2 Bài toán chấp nhận lồi tách và một phương pháp giải 37

2.2.1 Bài toán chấp nhận lồi tách 37

2.2.2 Giới thiệu một mô hình thực tế dẫn tới bài toán 38

2.2.3 Chuyển bài toán chấp nhận lồi tách về bài toán quy hoạch lồi 39

Kết luận **46**

Tài liệu tham khảo **47**

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự giúp đỡ và hướng dẫn tận tình của GS.TSKH Lê Dũng Mưu. Qua đây, tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới Thầy, người đã dành nhiều thời gian và tâm huyết để hướng dẫn và tạo điều kiện cho tác giả trong suốt thời gian làm luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các giáo sư, phó giáo sư công tác tại Viện Toán học, Viện Công nghệ Thông tin - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, các thầy cô trong trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, tác giả đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức phục vụ cho việc nghiên cứu và công tác của bản thân. Tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành đến các thầy cô.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng đào tạo, khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Cuối cùng tác giả xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè đã luôn động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2018

Học viên

Nguyễn Thành Trung

Mở đầu

Quy hoạch lồi là một lớp bài toán cơ bản của tối ưu hóa. Một đặc điểm cơ bản nhất của lớp bài toán này là mọi điểm cực tiểu địa phương đều là cực tiểu tuyệt đối. Tính chất quan trọng này cho phép các lý thuyết có tính địa phương như giới hạn, vi phân, có thể áp dụng trực tiếp vào quy hoạch lồi. Lý thuyết về bài toán quy hoạch lồi đã được quan tâm nghiên cứu nhiều và đã thu được nhiều kết quả quan trọng dựa trên lý thuyết của giải tích lồi và tối ưu hóa; về phương diện tính toán, đã có khá nhiều phương pháp hữu hiệu cho lớp bài toán này. Các phương pháp đó đã được giới thiệu trong cuốn sách Tối ưu lồi (Convex Optimization) của các tác giả Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe do nhà xuất bản Cambridge University Press in năm 2004.

Đề tài luận văn "Một phương pháp quy hoạch lồi giải một lớp bài toán chấp nhận lồi tách" có mục đích giới thiệu lại kiến thức cơ bản về giải tích lồi, bài toán về quy hoạch lồi. Đặc biệt đi sâu vào các bài chấp nhận lồi tách và một phương pháp giải. Nội dung luận văn gồm hai chương:

Chương 1. "Kiến thức chuẩn bị" giới thiệu các kiến thức cơ bản nhất về tập lồi, hàm lồi và dưới vi phân hàm lồi.

Chương 2. "Phương pháp quy hoạch lồi giải bài toán chấp nhận lồi tách" giới thiệu bài toán quy hoạch lồi và một số tính chất của nó. Nhắc lại phương pháp chiếu đạo hàm giải bài toán đó. Cuối cùng tác giả giới thiệu bài toán chấp nhận lồi tách và một phương pháp giải.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, tác giả giới thiệu các kiến thức cơ bản nhất về giải tích lồi, là những kiến thức nền tảng cần thiết phục vụ cho việc nghiên cứu và giải quyết đề tài. Các kiến thức của chương này được tổng hợp từ các tài liệu [1] và [2].

1.1 Tập lồi, hàm lồi

Trước hết ta nhắc lại khái niệm tập lồi trong $\mathbb{R}^n$ và các khái niệm có liên quan.

Định nghĩa 1.1. Một tập $C \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là một *tập lồi*, nếu C chứa mọi đoạn thẳng đi qua hai điểm bất kỳ của nó. Tức là C lồi khi và chỉ khi

$$\forall x,\, y \in C,\, \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

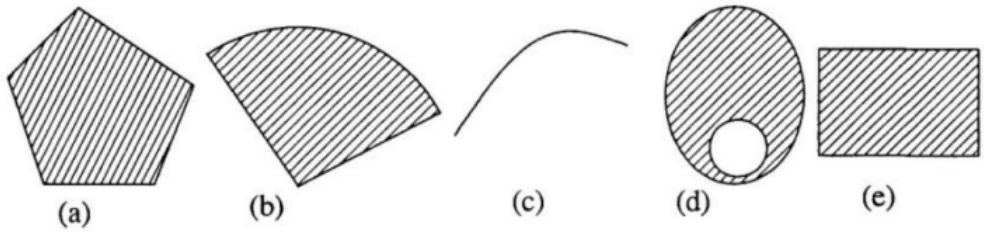
Ta nói x là *tổ hợp lồi* của các điểm (véctơ) $x^1, x^2, \ldots, x^k$ nếu

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j,\ \lambda_j > 0\ \forall j = 1, \ldots, k,\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

Tương tự, x là *tổ hợp affine* của các điểm (véctơ) $x^1, \ldots, x^k$ nếu

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j,\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

Tập hợp của các tổ hợp affine của $x^1, \ldots, x^k$ thường được gọi là *bao affine* của các điểm này.



Hình 1.1: (a), (b), (e) - Tập lồi; (c), (d) - Tập không lồi

Mệnh đề 1.1. *Tập hợp C là lồi khi và chỉ khi nó chứa mọi tổ hợp lồi của các điểm của nó. Tức là: C lồi khi và chỉ khi*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0 : \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1,\ \forall x^1, \ldots, x^k \in C \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \in C.$$

Chứng minh. Điều kiện đủ là hiển nhiên từ định nghĩa. Ta chứng minh điều kiện cần bằng quy nạp theo số điểm. Với $k = 2$, điều cần chứng minh suy ra ngay từ định nghĩa của tập lồi và tổ hợp lồi. Giả sử mệnh đề đúng với $k - 1$ điểm. Ta cần chứng minh với k điểm.

Giả sử x là tổ hợp lồi của k điểm $x^1, \ldots, x^k \in C$. Tức là

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j,\ \lambda_j > 0\ \forall j = 1, \ldots, k,\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

Đặt

$$\zeta = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j.$$

Khi đó $0 < \zeta < 1$ và

$$x = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j x^j + \lambda_k x^k = \zeta \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\zeta} x^j + \lambda_k x^k.$$

Do

$$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\zeta} = 1$$

và $\dfrac{\lambda_j}{\zeta} > 0$ với mọi $j = 1, \ldots, k-1$ nên theo giả thiết quy nạp, điểm

$$y := \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\zeta} x^j \in C.$$

Ta có

$$x = \zeta y + \lambda_k x^k.$$

Do $\zeta > 0,\ \lambda_k > 0$ và

$$\zeta + \lambda_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1,$$

nên x là một tổ hợp lồi của hai điểm y và x^k đều thuộc C. Vậy $x \in C$. □

Lớp các tập lồi là đóng với các phép giao, phép cộng đại số và phép nhân tích Descartes. Cụ thể, ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.2. *Nếu A, B là các tập lồi trong $\mathbb{R}^n, C$ là lồi trong $\mathbb{R}^m$, thì các tập sau là lồi :*

$$A \cap B := \{x \mid x \in A,\ x \in B\},$$

$$\lambda A + \beta B := \{x \mid \alpha a + \beta b,\ a \in A,\ b \in B,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

$$A \times C := \{x \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x = (a, c) \colon a \in A,\ c \in C\}.$$

Định nghĩa 1.2. Một điểm $a \in C$ được gọi là *điểm trong tương đối* của C nếu nó là điểm trong của C theo tô-pô cảm sinh bởi aff$C$ (tập affine nhỏ nhất chứa C).

Ta sẽ ký hiệu tập hợp các điểm trong tương đối của C là ri$C$. Theo định nghĩa trên ta có:

$$\text{ri}C := \{a \in C \mid \exists B \colon (a + B) \cap \text{aff}C \subset C\},$$

trong đó B là một lân cận mở của gốc. Hiển nhiên

$$\text{ri}C = \{a \in \text{aff}C \mid \exists B \colon (a + B) \cap \text{aff}C \subset C\}.$$

Tiếp theo ta nhắc khái niệm hàm lồi và một số khái niệm liên quan.

Cho $C \subseteq \mathbb{R}^n$ là tập lồi và $f \colon C \to \overline{\mathbb{R}}$. Ta sẽ ký hiệu

$$\text{dom}f := \{x \in C \mid f(x) < +\infty\}.$$

Tập dom f được gọi là *miền hữu dụng* của f. Tập

$$\text{epi}f := \{(x, \mu) \in C \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \mu\}$$

được gọi là *trên đồ thị* của hàm f.

Bằng cách cho $f(x) = +\infty$ nếu $x \notin C$, ta có thể coi f được xác định trên toàn không gian và hiển nhiên là

$$\text{dom} f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\},$$

$$\text{epi} f = \{(x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \mu\}.$$

Do sẽ làm việc với hàm số nhận cả giá trị $-\infty$ và $+\infty$, nên ta quy ước:

$$\text{Nếu } \lambda = 0, \text{ thì } \lambda f(x) = 0 \text{ với mọi } x.$$

Định nghĩa 1.3. Cho $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ lồi và $f\colon C \to \overline{\mathbb{R}}$. Ta nói f là *hàm lồi* trên C, nếu epi$f$ là một tập lồi trong $\mathbb{R}^{n+1}$.

Sau đây ta sẽ chủ yếu làm việc với hàm $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Trong trường hợp này, dễ thấy rằng định nghĩa trên tương đương với

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \ \forall x,\, y \in C,\, \forall \lambda \in (0,1).$$

Hàm $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là *lồi chặt* trên C nếu

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \ \forall x,\, y \in C,\, \forall \lambda \in (0,1).$$

Hàm $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là *lồi mạnh* trên C với hệ số $\eta > 0$ nếu $\forall x,\, y \in C,\, \forall \lambda \in (0,1)$ có:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \frac{1}{2}\eta\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2.$$

Dễ kiểm tra được rằng, f lồi mạnh trên C với hệ số $\eta > 0$ khi và chỉ khi hàm

$$h(.) := f(.) - \frac{\eta}{2}\|.\|^2$$

lồi trên C.

Bằng qui nạp, dễ dàng chứng minh được rằng, nếu f nhận giá trị hữu hạn trên tập lồi C, thì với mọi số tự nhiên m và mọi $x^1, \ldots, x^m \in C$ thoả mãn $\lambda_1 \geq 0, \ldots,$ $\lambda_m \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$, ta có

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x^j\right) \leq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f(x^j) \text{ (bất đẳng thức Jensen).}$$

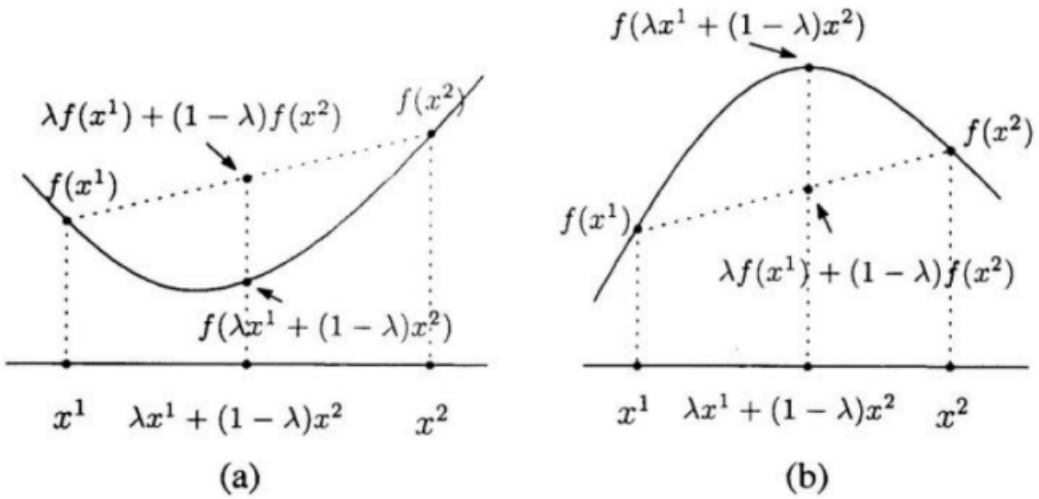
Hàm f được gọi là một *hàm lõm* trên C, nếu $-f$ lồi trên C.

Ví dụ 1.1. Cho $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ là một mặt cầu và $h\colon S \to \mathbb{R}_+$ là một hàm bất kỳ. Định nghĩa hàm f như sau:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{nếu } \|x\| < 1, \\ h(x) & \text{nếu } \|x\| = 1, \\ +\infty & \text{nếu } \|x\| > 1. \end{cases}$$

Hàm này được gọi là hàm mặt cầu. Dễ thấy rằng f là một hàm lồi trên $\mathbb{R}^n$, mặc dù h là một hàm không âm bất kỳ trên mặt cầu S.

Ví dụ 1.2. Ví dụ về hàm lồi, hàm lõm



Hình 1.2: (a) - Hàm lồi; (b) - Hàm lõm

Dưới đây là một điều kiện cần và đủ về hàm lồi, rất tiện ích trong nhiều trường hợp.

Mệnh đề 1.3. *Một hàm $f\colon C \to \overline{\mathbb{R}}$ là lồi trên C khi và chỉ khi*

$$\forall x,\, y \in C,\ \forall \alpha > f(x),\ \forall \beta > f(y),\ \forall \lambda \in [0,1]$$
$$\Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta.$$